

Einstein und die übermäßige Wirksamkeit von Fluktuationen

Robert Graham

Fachbereich Physik – Campus Essen

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Zum Einstein Jahr 2005

26.11.2005

Übersicht

- Wandel des physikalischen Weltbilds seit 1905
- Einsteins Wunderjahr
- Fluktuationen aus der Thermodynamik: Einsteins Mikroskop
- Brownsche Bewegung
- Rolle in der Quantentheorie
- Einige Anwendungen und Verallgemeinerungen
- Fazit

• Wandel im Weltbild der Physik

bis ca 1900:

- ganze Welt erfüllt von Kontinuum
leerer Raum Aether
Materie fest, flüssig, gasförmige
elektromagnetisches Feld

• Atome Chemie

Dalton 1803 Gewicht

Mendelejew u.
Meyer 1869 Periodensystem

• Molekulare „Hypothese“ Physik

Maxwell Wärme

Boltzmann Statistische Gastheorie

Atome rätselhaft,

erschiene(n) wie theoretische Konstrukte

Vergleichbar heute: Strings

bis ca 1900:

- deterministische Dynamik:

Lösungen von Differentialgleichungen (Newton, Maxwell)

für gegebene Anfangsbedingungen determinieren die Dynamik in alle Zukunft.

(Laplacescher Daemon)

Handiges Bild:

- Auf ihrer fundamentalsten Ebene: sämtliche Naturgesetze sind statistisch und beschreiben Fluktuationen.

Physik ist nicht nur in „der Sprache der Mathematik“ geschrieben

(Wigner: „The unreasonable effectiveness of mathematics“)

sondern in der Sprache der Statistik
unreasonable effectiveness
of fluctuations

- Auf ihrer fundamentalsten Ebene sind die vermeintlichen Kontinua (auch) diskret

3 Ursachen für fundamentale

Rolle von Fluktuationen:

1. Klassisches Chaos (Poincaré)

Instabilität von Lösungen
nichtlinearer Differentialgleichungen
begrenzt Determinismus bei
endlichen Ressourcen.

2. Sieg der Statistischen Mechanik über die Thermodynamik

(Maxwell, Boltzmann, Gibbs)

Ermöglicht durch Beweis der
„Molekülhypothese“

und

3. Quantentheorie

- ohne Vorbereitung im 19. Jhdtt.
- überraschendste und radikalste Revolution der Physik im 20. Jhdtt.
- ausgelöst von Planck 1900 und Einstein 1905
- Ausdehnung auf alle Gebiete der Physik im 20. Jhdtt
- Quantenrevolution ist noch nicht abgeschlossen:
 - Quantentheorie von Raum und Zeit
 - Quanten-Computer

* Einsteins annus mirabilis



Albert Einstein 1905

6 Publikationen, davon 4 zu Fluktuationen

132

17.3.1905 Lichtenquanten

- **6. Über einen
die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes
betreffenden heuristischen Gesichtspunkt;
von A. Einstein.**

Zwischen den theoretischen Vorstellungen, welche sich die

30.4.1905 Doktorarbeit
289

- **3. Eine neue Bestimmung der Molekül-
dimensionen; von A. Einstein.**

Die ältesten Bestimmungen der wahren Größe der Moleküle

549

11.5.1905 Brownsche Bewegung

- **5. Über die von der molekularkinetischen Theorie
der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden
Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;
von A. Einstein.**

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekular-

Aus heutiger Sicht:

tiefe innere Beziehungen zwischen den Arbeiten zur Lichtquantenhypothese und zur Brownschen Bewegung

- Analyse von Fluktuationen
- Etablierung der diskreten Substruktur eines Kontinuums
- Ursache (unbekannt in 1905) für diskrete Substruktur ist Quantentheorie
 - Quantenelektrodynamik
 - Quantentheorie des Elektrons

Mit diesen Arbeiten von 1905 nahm die Veränderung des physikalischen Weltbilds zu einem statistischen ihren Lauf.

• Fluktuationen aus der Thermodynamik
als Einsteins Mikroskop

Boltzmann:

$$S \stackrel{\leftarrow}{=} k_B \ln W$$

aus der mikroskopischen Berechnung
der Wahrscheinlichkeit W eines
Systemzustands läßt sich auf
dessen Entropie S schließen

Einstein 1904:

$$S \stackrel{\Rightarrow}{=} k_B \ln W, \quad W \stackrel{\leftarrow}{=} \text{const } e^{S/k_B}$$

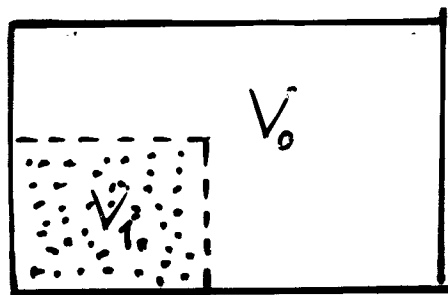
aus der gemessenen Entropie
(Thermodynamik) läßt sich auf
die mikroskopisch erzeugten
Fluktuationen schließen

⇒ Einblick in die mikroskopischen
Naturgesetze

z. B. ideales Gas im Volumen V

$$S = R \ln V + \text{const} \quad (\text{für 1 Mol})$$

⇒ relative Wahrscheinlichkeit $\frac{W_1}{W_0}$
für folgende Fluktuation:



$$L \approx 6 \cdot 10^{23} \\ \text{Atome}$$

↑
alle Gasatome im
Teilvolumen V_1 von V_0

$$\frac{W_1}{W_0} = e^{(S_1 - S_0)/k_B} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{R/k_B} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^L$$

Schluß: Das ideale Gas besteht
mikroskopisch aus L Teilchen,
die voneinander vollkommen
unabhängig sind.

Anwendung auf Entropie des thermischen Lichtfelds (im Wienschen Bereich): Frequenz (ν , $\nu + \Delta\nu$)

$$S = \frac{E}{B\nu} (\ln V + \text{unabhängig von } V)$$

$$\Rightarrow \frac{W_1}{W_0} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{E/k_B\beta\nu} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^N$$

$$E = N \underbrace{(k_B\beta)}_h \nu$$

\Rightarrow Lichtquantenhypothese

Spätere Verfeinerung durch Benützung des Planckschen Strahlungsgesetzes

$$\langle \Delta E^2 \rangle = h\nu \langle E \rangle + \frac{c^3}{8\pi\nu^2\Delta\nu} \frac{\langle E \rangle^2}{\nu}$$

\nearrow
Schrottauschen
von Photonen

\uparrow
zufällige
Interferenz von
Wellen

\Rightarrow Die von Planck gemessene Zustandsgleichung $\langle E \rangle = E(T)$ impliziert den Teilchen-Welle Dualismus des Lichtfelds

Brownsche Bewegung

Problem: Wie kann man die thermische Molekularbewegung sichtbar machen? zu klein, zu schnell

Einsteins Idee: Teilchen in Suspensionen verhalten sich wie große, schwere Moleküle in idealem Gas
Mikroskopisch beobachtbar,
viel langsamer $\sim \frac{1}{\sqrt{M}}$

⇒ man kann die „molekulare Hypothese“ unter dem Mikroskop verifizieren.

(thermische Bewegung der suspendierten Teilchen

= Brownsche Bewegung
(Brown 1828)

Innovationen in Einsteins Arbeit

- Im Schwerfeld Gleichgewicht zwischen Teilchenstrift (Reibung) und Konzentrationsausgleich durch Diffusion

$$D = \frac{k_B T}{\gamma} \quad \text{„Einstein-Relation“}$$

- „Konzentration“ wird als „Aufenthaltswahrscheinlichkeit“ von Teilchen umgedeutet

⇒ neue Bedeutung und neue Herleitung des Fickschen Diffusionsgesetzes

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Fick 1855 Konzentration

Einstein 1905 Wahrscheinlichkeit

• **Markov'sche Grundannahme:**

Für hinreichend große Zeitintervalle
ändert sich der Teilchenort
statistisch unabhängig von allen
früheren Änderungen

„Markoff Annahme“ (Markoff 1906)

• **Entscheidendes Ergebnis**

- Teilchengeschwindigkeit ist
keine gute Messgröße

- mittleres Verschiebungsquadrat

$$\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle = 2Dt$$

• **Fluktuationen und Dissipation
sind verknüpft**

„Fluktuations-Dissipations Theorem“

Callen und Welton 1951

Kubo 1957

Jedoch: Einsteins Theorie bedeutet noch keine grundsätzliche Abkehr vom deterministischen Weltbild.

Bei genauerer Betrachtung der Teilchenbewegung (unendlich genauer Computer): noch immer deterministisch

Endgültige Besiegelung des statistischen Weltbilds erst durch Quantentheorie:

Einzug der Brownschen Bewegung in die Naturgesetze selbst.

• Rolle der Brownschen Bewegung
in der Quantentheorie

- Unschärferelation:

$$\langle \Delta x \rangle \langle \Delta v \rangle = \frac{h}{4\pi m}$$

es gibt keine glatten Teilchenbahnen mehr

- Schrödingergleichung für Wahrscheinlichkeitsamplitude eines (freien) Teilchens

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h}{4\pi m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

geht aus dem

Fick / Einsteinschen Diffusionsgesetz durch analytische

Fortsetzung $t \rightarrow it$

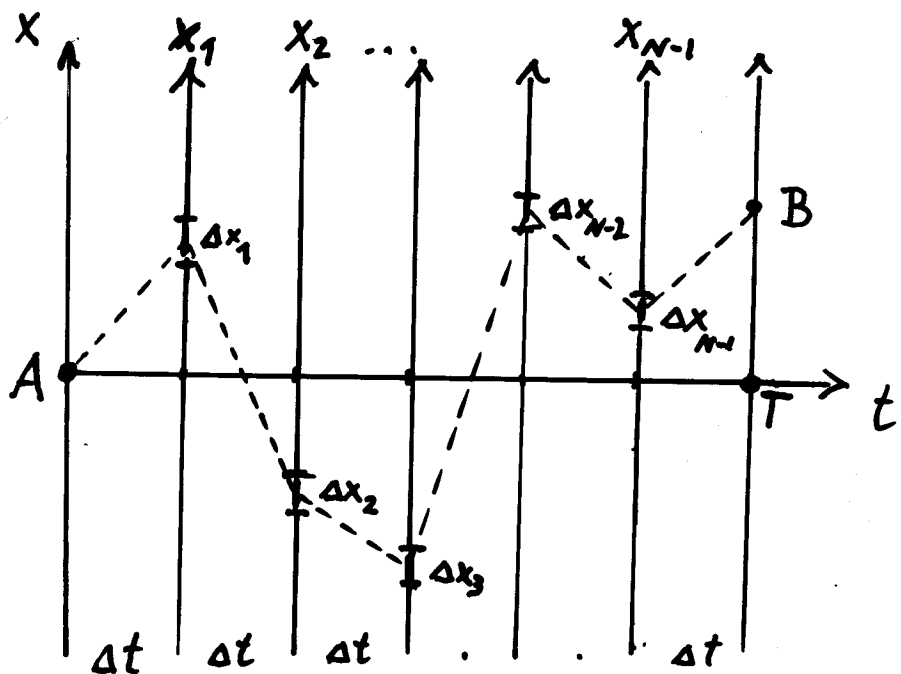
hervor, und $D = \frac{h}{4\pi m}$

Aber: ψ hat zwar noch eine statistische Bedeutung, ist aber keine Wahrscheinlichkeit, sondern

$$W = |\psi(x,t)|^2$$

- Wie bewegt sich demnach ein Teilchen räumlich von A nach B in Zeit T?

(i) Brownsche Bewegung (Wiener 1930)



A, B fest;

$\Delta t \rightarrow 0$

$\Delta x \rightarrow 0$

alle stetigen Wege sind möglich, jeder mit seiner eigenen Wahrschkt. dW_A^B („Wiener-Maß“)

Wiener Maß

$$\begin{aligned} dW_A^B &= \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow dx_i \\ \Delta t \rightarrow 0}} \prod_{i=1}^{N-1} \left[\Delta x_i e^{-\frac{1}{4D} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta t}} \right] \\ &= \text{" } Dx e^{-\frac{1}{4D} \int_A^B dt \dot{x}^2(t)} \text{"} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit von A nach B
längs einem vorgegebenen Weg

Unstetige Wege haben Wahrschk 0.

Differenzierbare Wege ebenfalls

Typische Wege haben $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \neq 0$, endlich

Gesamte Wahrschk von A nach B
durch Integration über alle Wege

$$W_{Br}(A \rightarrow B, T) = \int Dx e^{-\frac{1}{4D} \int_{A,0}^{B,T} dt \dot{x}^2(t)}$$

(ii) Übertragung auf die
Schrödingergleichung (Feynman, Kal)

$$- D = \frac{h}{4\pi m} = \frac{\hbar}{2m}$$

- analytische Fortsetzung

$$t \rightarrow it,$$

d.h. nach Integration über
die gleiche Klasse von Wegen
wie bei Brownscher Bewegung
einfach

$$T \rightarrow iT$$

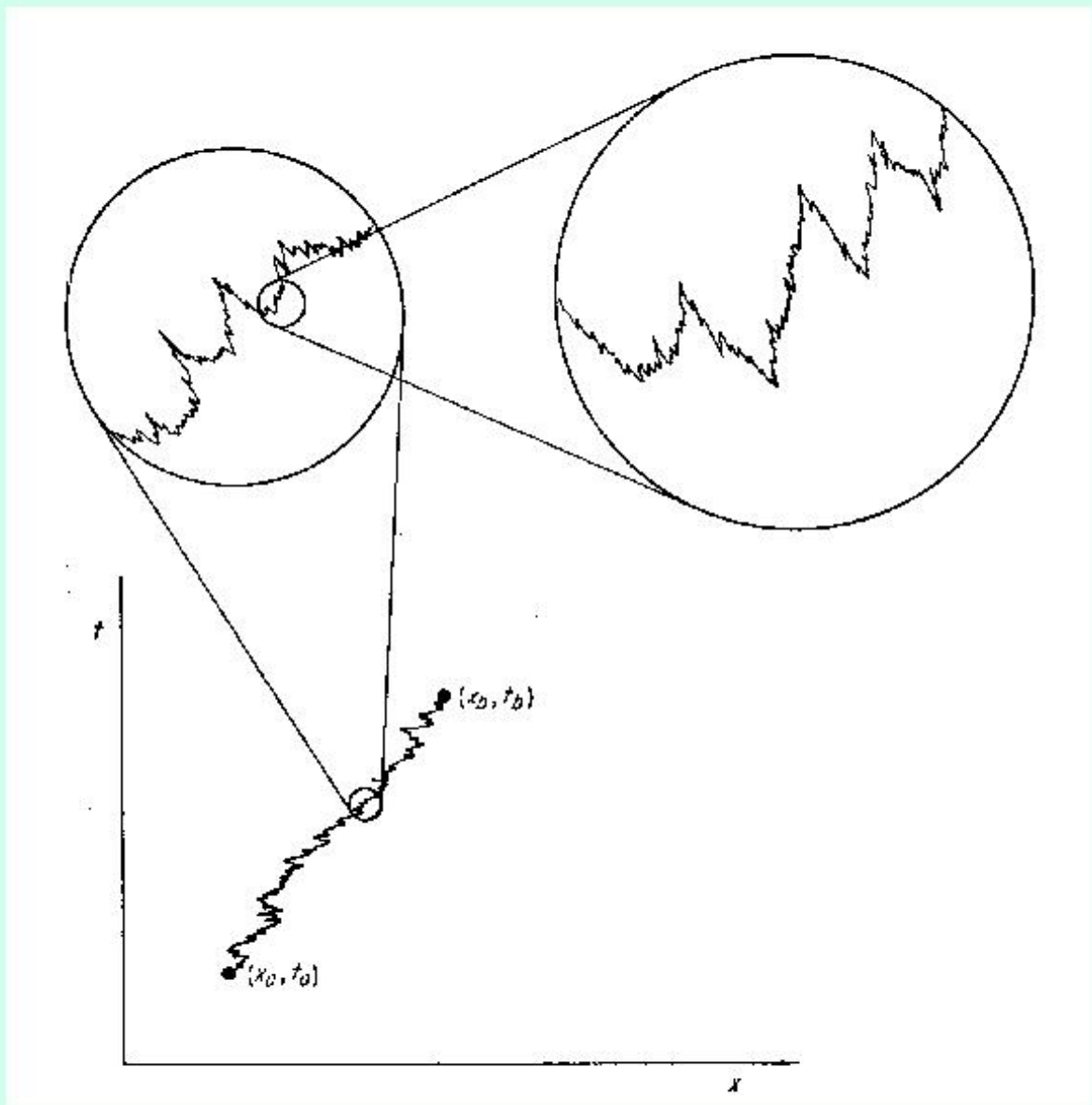
Wahrscheinlichkeitsamplitude
von A nach B in Zeit T

$$K(A \rightarrow B, T) = W_{Br}(A \rightarrow B, iT)$$

„Feynman Propagator“

$$\begin{aligned} - W_{\text{Quanten}}(A \rightarrow B, T) &= |K(A \rightarrow B, T)|^2 \\ &= |W_{Br}(A \rightarrow B, iT)|^2 \end{aligned}$$

Brownsche Wege



• Einige Anwendungen und Verallgemeinerungen

- Smoluchowski : gleichzeitig mit Einstein, aber mit spezielleren Modellannahmen

- Langevin 1908:

Differentialgleichung (Newton) für Teilchenbahn

„Langevin.“ Kraft

→ Theorie der stochastischen Differentialgleichungen (Ito 1944)

- Fokker 1914

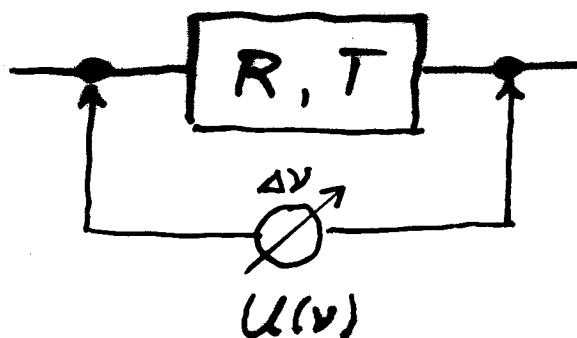
Verallgemeinerung der Diffusionsgleichung zur Fokker-Planck Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} K(x)W + D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Drift

Johnson 1928, Nyquist 1928

Entdeckung und Erklärung des
elektrischen Widerstandsrauschens



$$\langle U(v) \rangle = 0$$

$$\langle U^2(v) \rangle = 2 R k_B T \nu$$

Fluktuations-Dissipations Theorem
wie bei Einstein

→ Callen and Welton 1951

Kubo 1957

...

- Onsager und Machlup 1953

...

Einstein-Boltzmann Formel für
Zustände $W(q) \sim \exp(S(q)/k_B)$

verallgemeinert für Prozesse

$$W(\{q(\tau)\}) \sim \exp\left[\frac{1}{k_B} \int d\tau \mathcal{O}(q(\tau), \dot{q}(\tau))\right]$$

- Feynman und Vernon,
Leggett und Caldeira

Brownsche Bewegung von
Quantenteilchen in "Wärmebad"

- Haken 1977, ...

Spontanemission in gepumpten Atomen
als quantenmechanisch verallg.
Brownsche Bewegung.

Quantenfluktuationen des Lasers
als Selbstorganisation bei
Brownscher Bewegung in einem
getriebenen System im
Fließgleichgewicht

- Haken 1971, ... "Synergetik"
Allgemeine Theorie für Entstehung
von Ordnung in getriebenen Systemen
mit thermischen oder Quantenfl.

- Brady 1985

Entdeckung des auf Kinesin beruhenden
Brownschen Motors in der Zellbiologie
<http://www.sciencemag.org/feature/data/1049155.sh>

• Fazit

- Einstein 1905 ist (mit) verantwortlich für heutiges statistisches Weltbild.
 - Schluß von Entropie auf Fluktuationen (→ Lichtquanten)
 - Transformation von molekularen Fluktuationen ins Sichtbare (→ Brownsche Bewegung)
 - Ebenen des Weges für die von Grund auf statistische Quantentheorie (→ ohne ihr je beizutreten)
- Wie sind Strukturen und systematische Dynamik in einer Welt aus Fluktuationen überhaupt möglich?

Generelles Thema der
Statistischen Physik
Quantentheorie

- Im Gleichgewicht ist Strukturbildung in vielen Fällen gut verstanden.
- Für getriebene zeitabhängige Systeme,
Systeme mit eingefrorenen Nichtgleichgewichtszuständen,
Systeme mit Chaos und Quantenfluktuationen
...
sind viele Fragen offen
→ die nächsten 100 Jahre!